PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARABOLIK NONLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE PERTUBASI HOMOTOPI

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Pada
Jurusan Matematika

Oleh:

DWI HAYATI
10554001574

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2010

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARABOLIK NONLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE PERTUBASI HOMOTOPI

DWI HAYATI
NIM: 10554001574

Tanggal Sidang: 04 Februari 2010
Periode Wisuda: Juli 2010

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian eksplisit persamaan diferensial parabolik nonlinear $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$ dengan menggunakan Metode Pertubasi Homotopi berdasarkan masalah nilai batas dan nilai awal $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan $u(x,0) = f(x)$. Metode pertubasi homotopi merupakan salah satu metode yang cukup banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinear dengan mengkontruksi $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$ menjadi bentuk pertubasi homotopi $H(v,p) = (1-p)(v_0 - u_{0t}) + p[(v_t - v_{xx} - f(u) - \phi(x,t)] = 0$. Penyelesaian eksplisit yang diperoleh adalah $u(x,t) = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$. Berdasarkan perhitungan terlihat bahwa hasil yang diperoleh lebih efektif dan akurat untuk menghampiri penyelesaian eksak.

Kata Kunci: Metode Pertubasi Homotopi, Persamaan Diferensial Parabolik Nonlinier.

ON THE SOLUTION OF THE NONLINEAR PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION BY USING HOMOTOPY PERTURBATION METHOD

DWI HAYATI
NIM: 10554001574

Date of Final Exam: February 04th 2010
Graduation Cremony Priod: July 2010

Mathematic Departement
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This thesis discusses explicit solution of the nonlinear parabolic differential equation $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$ *by using Homotopy Perturbation Method based on boundary and initial value problem* $u(0,t) = u(L,t) = 0$ *and* $u(x,0) = f(x)$. *Homotopy Perturbation Method is one method widely used enough to solve for the nonlinear partial differential equations. By constructed* $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$ *to be a homotopy perturbation* $H(v,p) = (1-p)(v_0 - u_{0t}) + p[(v_t - v_{xx} - f(u) - \phi(x,t)] = 0$. *The explicit solution obtained is* $u(x,t) = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$. *Based on computation show that the results obtained more effective and accurate approximate the exact solution.*

***Keywords**: Homotopy Perturbation Method, Nonlinear Parabolic Differential Equation*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan diferensial yang paling sedikitnya melibatkan dua variabel. Pada beberapa bidang terapan dan rekayasa, seperti fisika, kimia, matematika terapan, biologi dan teknik persamaan diferensial parsial memegang peranan penting. Hal ini dikarenakan, pada umumnya persoalan-persoalan bidang terapan dan rekayasa diungkapkan dalam bentuk persamaan diferensial nonlinear, yaitu bentuk hiperbolik, parabolik dan eliptik. Salah satunya adalah persamaan parabolik yang menjadi fokus pada tugas akhir ini.

Oleh karena sebagian besar persamaan diferensial nonlinear sangat sulit untuk diselesaikan secara analitik, maka berbagai metode telah diusulkan untuk mendapatkan penyelesain eksplisit persamaan diferensial nonlinear, meskipun sebagian kecil persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan metode variabel terpisah.

Untuk menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial nonlinear, biasanya dilakukan dengan melinearkan persamaan pada suku-suku nonlinearnya. Beberapa cara dilakukan, misalnya dengan menggunakan hampiran polinomial Taylor atau metode pertubasi. Namun, pada saat persamaan diferensial dilinearkan maka konsekuensinya akan memuat galat. Untuk menghindari munculnya galat suatu metode tanpa pelinearan persamaan diusulkan.

Metode pertubasi homotopi pertama kali diusulkan oleh Ji-Huan He dan telah digunakan secara meluas untuk menyelesaikan persamaan liniear dan nonlinear. Berdasarkan hasil kajian, diperoleh bahwa metode pertubasi homotopi efektif, mudah dan akurat untuk menghampiri penyelesaian eksplisit dan tanpa menggunakan perhitungan numerik.

Ghotbi, dkk (2007), mengkaji tentang penyelesaian eksplisit sistem persamaan diferensial parsial nonlinear dan membandingkan dengan metode dekompisisi Adomian. Dan hasil kajiannya menunjukkan bahwa metode pertubasi homotopi lebih efisien dan lebih akurat dibandingkan dengan metode dekomposisi adomian.

Hal inilah yang membuat penulis tertarik untuk menggunakan metode pertubasi homotopi dalam mencari penyelesaian persamaan diferensial parabola nonlinear dengan judul **”Penyelesaian Persamaan Diferensial Parabolik Nonlinear dengan Menggunakan Metode Pertubasi Homotopi”.**

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada skripsi ini adalah menentukan penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinear $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$ berdasarkan syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dengan menggunakan metode pertubasi homotopi.

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini penulis hanya membatasi pada persamaan parabolik nonlinear dengan persamaan umumnya $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$ dengan variabel bebas masing-masing x dan t.

1.4 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinear dengan persamaan umumnya $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$ berdasarkan syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dengan menggunakan metode pertubasi homotopi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1) Dapat menyelesaikan secara eksplisit, persamaan diferensial parabolik nonlinear $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$ berdasarkan syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$.

2) Penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinear yang di hasilkan oleh metode pertubasi homotopi ini cukup efektif dan akurat.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini terdiri dari beberapa bab, yaitu:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang digunakan, seperti: persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial, klasifikasi persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial parabolik, homotopi, pertubasi dan metode pertubasi homotopi.

BAB III Metodologi

Bab ini berisikan studi literatur yang digunakan penulis serta langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari skripsi ini.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan tentang pembahasan masalah.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran-saran penulis.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat fungsi yang tidak diketahui dan satu atau lebih turunannya. Persamaan diferensial dibagi 3, yaitu:

a) Diferensial Biasa.

Persamaan diferensial biasa merupakan suatu persamaan yang memuat turunan pertama dari suatu fungsi yang terdiri dari satu variabel. Turunan pertama ini biasanya digunakan untuk mencari nilai maksimum dari variabelnya.

Definisi 2.1 Diferensial biasa terjadi jika *u* adalah fungsi yang hanya terdiri dari satu variabel dan hanya dapat diturunkan terhadap variabel tersebut, dengan rumus:

$$u'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \qquad (2.1)$$

b) Diferensial Parsial.

Persamaan diferensial parsial merupakan turunan pertama dari suatu fungsi yang terdiri dari dua variabel *x* dan *y*.

Definisi 2.1 Diferensial parsial terjadi jika *u adalah* fungsi dua variabel *x* dan *y* dan diturunkan terhadap salah satu variabel dengan menganggap variabel lainnya konstanta, dengan rumus:

$$u_x'(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}$$, jika diturunkan terhadap *x*

$$u_y'(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h}$$, jika diturunkan terhadap *y*

Aturan untuk mencari turunan parsial jika $z = u(x,y)$, yaitu:

i. Untuk mencari *u*, pandang *y* sebagai konstanta dan diferensialkan $u(x,y)$ terhadap *x*.

ii. Untuk mencari u, pandang x sebagai konstanta dan diferensialkan $u(x,y)$ terhadap y.

c) Persamaan Diferensial kedua dan seterusnya.

Diferensial parsial kedua terjadi jika u adalah fungsi dua variabel, maka turunan parsialnya u_x dan u_y juga dua variabel, sehingga kita dapat meninjau turunan parsial $(u_x)_x$, $(u_x)_y$, $(u_y)_x$,dan $(u_y)_y$ yang disebut turunan parsial kedua. Jika $z = u(x,y)$ maka diferensial parsial keduanya, yaitu:

i. $(u_x)_x = u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

ii. $(u_x)_y = u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

iii. $(u_y)_x = u_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

iv. $(u_y)_y = u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

2.2 Persamaan Diferensial Parsial

Formulasi matematika dari kebanyakan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat dipersentasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas yang biasanya adalah waktu dan jarak (ruang). Persamaan diferensial parsial orde satu dalam variabel x dan y ditulis secara umum dalam bentuk:

$$Au_x + Bu_y + Cu = D \tag{2.2}$$

Selanjutnya bentuk umum persamaan diferensial parsial order 2 dan dua dimensi adalah :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) dikatakan persamaan diferensial linear jika nilai A,B,C,D,E,F, dan G adalah konstanta atau suatu fungsi lain dan dikatakan persamaan diferensial nonlinear jika A,B,C,D,E,F, dan G adalah suatu fungsi integral dari fungsi diferensial yang ada pada persamaan tersebut. Persamaan diferensial parsial dapat dibedakan menjadi 3 tipe dasar, yaitu:

a) Persamaan (2.3) disebut persamaan parabolik jika $B^2 - 4AC = 0$.

Persamaan parabolik biasanya merupakan persamaan yang mengandung waktu sebagai variabel bebas. Persamaan parabolik yang paling sederhana adalah persamaan perambatan panas dan difusi polutan, yang mempunyai bentuk:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

Penyelesaian dari persamaan diatas adalah mencari temperatur T untuk nilia jarak *x* pada setiap waktu *t*.

b) Persamaan (2.3) disebut persamaan eliptik jika $B^2 - 4AC < 0$.

Persamaan differensial eliptik biasanya berhubungan dengan masalah kesetimbangan atau kondisi permanen. Seperti aliran air tanah dibawah bendungan dan karena adanya pemompaan serta defleksi plat akibat pembebanan, yang mempunyai bentuk:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.5}$$

c) Persamaan (2.3) disebut persamaan hiperbolik jika $B^2 - 4AC > 0$.

Persamaan hiperbolik biasanya berhubungan dengan getaran. Persamaan hiperbolik yang paling sederhana adalah persamaan gelombang, yang mempunyai bentuk:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.6}$$

dengan *u* adalah perpindahan vertikal (fluktuasi) pada jarak *x* dari ujung tali yang bergetar yang mempunyai panjang *L* sesudah waktu *t*.

Secara jelas dapat dilihat bahwa solusi dari persoalan persamaan diferensial parsial tidak hanya ditentukan oleh persamaan tersebut secara sendiri, tetapi diperlukan nilai batas (*boundary)* atau juga nilai awal (*initial value*). Syarat yang diperlukan oleh suatu persoalan adalah:

i. Penyelesaian harus ada.
ii. Penyelesaian tersebut harus unik/khusus.

iii. Penyelesaian tersebut harus secara kontinu bergantung pada nilai awal dan nilai batas.

2.3 Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang mengandung fungsi dua atau lebih variabel bebas.Persamaan diferensial ini memiliki beberapa kelompok, yaitu:

a) Berdasarkan orde.

Orde suatu persamaan diferensial adalah orde turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial tersebut. Pertimbangkan kembali persamaan (2.3), jika A, B, C bernilai tidak nol maka persamaan (2.3) menjadi persamaan diferensial parsial orde dua. Jika A, B, C bernilai nol serta D atau E bernilai nol maka persamaan (2.3) menjadi persamaan diferensial parsial orde pertama.

Contoh 2.1

i. $u_t = u_x$, disebut orde satu karena orde turunan tertingginya bernilai satu

ii. $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, disebut orde dua karena orde turunan tertingginya bernilai dua

Persamaan diferensial orde pertama secara umum ditulis dalam bentuk persamaan (2.2). Penyelesaian persamaan (2.2) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik variabel terpisah dengan bentuk perkalian $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Contoh 2.2

Tentukan penyelesaian $u = u(x, y)$ dari persamaan diferensial orde satu berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad (2.7)$$

<u>Penyelesaian</u> :

Penyelesaian persamaan (2.7) dilakukan dengan menggunakan variabel terpisah, maka

$$\partial u = \partial x$$

Dan mengintegralkan kedua ruas sehingga diperoleh

$$u = x + c$$

Contoh 2.3

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial orde dua

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2.8)$$

<u>Penyelesaian</u> :

Jika $u(x, y) = X(x)Y(y)$, maka persamaan (2.8) menjadi

$$X^{''}Y = 4XY^{'}$$

Pembagian dengan $4XY$, dan dipisahkan variabel-varibel tersebut, maka

$$\frac{X^{''}}{4X} = \frac{Y^{'}}{Y} \qquad (2.9)$$

Karena ruas kiri pada persamaan diatas tidak bergantung pada x dan ruas kiri tidak bergantung kepada y maka diasumsikan bahwa kedua ruas sama dengan konstan. Untuk diberikan sebuah konstanta $\lambda^2 > 0, \lambda^2 < 0$ atau $\lambda^2 = 0$. Selanjutnya penyelesaian yang diberikan akan berbeda tergantung kepada nilai λ.

a. Kasus $\lambda^2 > 0$, maka persamaan (2.9) menjadi

$$\frac{X^{''}}{4X} = \frac{Y^{'}}{Y} = \lambda^2$$

Penyelesaian untuk X diberikan oleh

$$X = c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x$$

sedangkan penyelesaian Y diberikan oleh

$$Y = c_3 e^{\lambda^2 y}$$

Jadi penyelesaian untuk $u = XY$ dari persamaan (2.8) adalah

$$\begin{aligned} u(x, y) &= X(x)Y(y) \\ &= (c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x) \\ &= C_1 e^{\lambda^2 y} \cosh 2\lambda x + C_2 e^{\lambda^2 y} \sinh 2\lambda x \end{aligned}$$

dengan $C_1 = c_1 c_3$ dan $C_2 = c_2 c_3$

b. Kasus $-\lambda^2 < 0$, maka persamaan (2.9) menjadi

$$\frac{X^{''}}{4X} = \frac{Y^{'}}{Y} = -\lambda^2$$

penyelesaian untuk X diberikan oleh

$$X(x) = c_1 \cos 2\lambda x + c_2 \sin 2\lambda x$$

sedangkan penyelesaian Y diberikan oleh

$$Y = c_3 e^{-\lambda^2 y}$$

Jadi penyelesaian dari persamaan (2.8) adalah

$$\begin{aligned} u(x,y) &= X(x)Y(y) \\ &= (c_1 \cos 2\lambda x + c_2 \sin 2\lambda x)(c_3 e^{-\lambda^2 y}) \\ &= C_1 e^{-\lambda^2 y} \cos 2\lambda x + C_2 e^{-\lambda^2 y} \sin 2\lambda x \end{aligned}$$

dengan $C_1 = c_1 c_3$ dan $C_2 = c_2 c_3$

c. Kasus $\lambda^2 = 0$, maka persamaan (2.9) menjadi

$$\frac{X^{''}}{4X} = \frac{Y^{'}}{Y} = 0$$

Penyelesaian untuk $X(x)$ dan $Y(y)$ masing-masing diberikan oleh

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

dan

$$Y(y) = c_3$$

sehingga

$$\begin{aligned} u(x,y) &= X(x)Y(y) \\ &= (c_1 x + c_2)c_3 \\ &= C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

dengan $C_1 = c_1 c_3$ dan $C_2 = c_2 c_3$.

b) Berdasarkan jumlah variabel

Jumlah variabel ditentukan dengan cara melihat jumlah fungsi diferensial yang ada pada persamaan tersebut.

Contoh 2.4

i. $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, memiliki 2 variabel bebas, yaitu u_t, dan u_{xx}

ii. $u_t = \alpha^2 \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right)$, memiliki 4 variabel bebas, yaitu u_t, u_{xx}, u_{yy}, dan u_{zz}.

c) Berdasarkan linear dan nonlinear

Pada persamaan diferensial ini dapat dilihat secara langsung bahwa suatu persamaan tersebut linear atau nonlinear. Dengan melihat koefisien pada fungsi turunan, jika koefisiennya konstanta atau suatu fungsi lain maka persamaan itu disebut persamaan diferensial linear, sedangkan jika koefisiennya suatu fungsi integral dari fungsi diferensial yang ada pada persamaan tersebut maka persamaan itu disebut persamaan diferensial nonlinear.

Contoh 2.5

I. Linier

i. $u_{xx} + \beta^2 u_{xx} = 0$

ii. $u_{xy} + 1 = u_x$

iii. $\left(x + y^2\right)u_x + 8u + u_{xy} = 0$

II. Nonlinier

i. $u_{yy} + u^2 = 1$

ii. $u_{xy} + (u_y)^2 + u = u_{xx}$

iii. $\left(x + y^2\right)(u_x)^{1/2} + 8u + u_{xy} = 0$

iv. $uu_x + u_{xy} + (u_y)^3 = 1 + u^2$

2.4 Persamaan Diferensial Parabolik

Persamaan parabolik yang paling sederhana adalah persamaan perambatan panas. Misalkan sebuah kabel dengan panjang L, ditempatkan pada sumbu X dengan ujung kiri $x = 0$ dan ujung kanan $x = L$. Jika $u(x,t)$ merupakan suhu kabel, dan u juga bergantung terhadap waktu t dan posisi x.

Untuk mengembangkan model aliran panas tersebut, pertimbangkan elemen volum kecil V kabel yang terletak, pada x dan $x+\Delta x$ dan suhu pada bidang A sebesar $u(x,t)$ dan pada bidang B sebesar $u(x+\Delta x,t)$. Beberapa prinsip-prinsip fisika digunakan untuk menggambarkan aliran panas sebagai berikut.

1. Konduksi panas

   Laju aliran panas (banyaknya panas yang mengalir setiap unit waktu melalui bidang A_0 adalah berbanding terhadap $\partial u / \partial t$ atau perubahan suhu pada bidang A. Perbandingan konstanta k disebut *konduktifitas termal material*.

2. Arah aliran panas

   Arah aliran panas selalu dari titik bersuhu tinggi ke titik yang bersuhu rendah.

3. Spesifikasi kapasitas panas

   Banyaknya panas yang dibutuhkan untuk menaikan suhu dari suatu kabel yang bermasa m oleh sejumlah Δu adalah $cm\Delta u$, dengan konstanta c adalah spesifikasi kapasitas panas *material*.

Jika dimisalkan bahwa H merupakan jumlah panas yang mengalir dari titik $x=0$ ke titik $x=L$ melalui permukaan A selama interval waktu Δt, maka kondisi panas menjadi,

$$H(x) = -ka\Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \tag{2.10}$$

dengan a adalah daerah bagian yang melintang dari kabel, dan tanda negatif menunjukkan arah perambatan panas ke suhu yang lebih rendah.

Perubahan panas ΔH pada volume V adalah banyaknya panas yang masuk pada ujung A dikurangi dengan banyaknya panas yang melewati B, atau ditulis

$$\begin{aligned} \Delta H &= H(x) - H(x+\Delta x) \\ \Delta H &= ka\Delta t\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right] \end{aligned} \tag{2.11}$$

Berdasarkan prinsip kerja ketiga, jika diasumsikan bahwa perubahan suhu pada volume V pada dasarnya adalah sama dengan perubahan suhu pada sumbu x, yaitu sebesar,

$$\Delta u = u(x,t+\Delta t) - u(x,t)$$

dan masa volume V kabel sebesar $a\rho\Delta x$, yang mana ρ adalah masa jenis kabel, maka

$$\Delta H = c\rho a\Delta x[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)] \tag{2.12}$$

Kesamaan perubahan panas pada persamaan (2.11) dan (2.12) memberikan,

$$ka\Delta t\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] = c\rho a\Delta x[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)]$$

Pembagian dengan Δx dan Δt pada kedua ruas, diperoleh,

$$k\frac{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]}{\Delta x} = c\rho\frac{[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)]}{\Delta t}$$

Selanjutnya, ambil limit untuk $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$, maka diperoleh,

$$k\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}}\frac{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]}{\Delta x} = c\rho\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}}\frac{[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)]}{\Delta t}$$

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2(x,t)} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x}(x,t)$$

atau

$$u_t = \alpha u_{xx} \tag{2.13}$$

dengan konstanta positif $\alpha = k/c\rho$ adalah difusitas material, dan persamaan (2.11) disebut persamaan aliran panas satu dimensi.

Selanjutnya, kita akan mempertahankan suhu pada kedua ujung-ujung kabel berada pada suhu 0^0 C. Untuk diperlukan syarat batas,

$$u(0,t)=0\text{, dan } u(L,t)=0, \qquad \text{untuk } t>0 \tag{2.14}$$

selain syarat batas yang diperlukan, kita juga perlu distribusi temperatur awal $f(x)$, yaitu:

$$u(x,0) = f(x) \tag{2.15}$$

yang biasa disebut syarat awal.

Untuk itu, dengan menghubungkan persamaan aliran panas (2.13), syarat batas (2.14) dan syarat awal (2.15), maka diperoleh model aliran panas kabel yang mana ujung-ujung kabel berada pada suhu konstan sebesar 0^0 C,

$$u_t = \alpha u_{xx} \qquad 0 < x < L, t > 0 \qquad (2.16)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \qquad (2.17)$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (2.18)$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode variabel terpisah dalam bentuk,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Subsitusikan persamaan diatas ke dalam persamaan (2.16) akan diperoleh persamaan:

$$X''(x) - KX(x) = 0 \qquad X'(0) = X'(L) = 0 \qquad (2.19)$$

dan

$$T'(t) - \alpha KT(t) = 0 \qquad (2.20)$$

dengan K adalah sembarang konstanta. Untuk menyelesaikan persamaan (2.19), kita mulai dengan persamaan karakteristik,

$$r^2 - K = 0 \qquad (2.21)$$

untuk $K > 0$, maka penyelesaian dari persamaan karakteristik (2.21) tidak diperoleh.

Sedangkan jika $K = 0$, maka persamaan karakteristik (2.21) mempunyai akar kembar yaitu $r = 0$, sehingga penyelesaian uumnya adalah:

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

Jika turunan pertama dari persamaan di atas adalah

$$X'(x) = c_2$$

Syarat batas pada (2.19) memberikan,

$$X'(0) = c_2$$

dan

$$X'(L) = c_2 = 0$$

sehingga penyelesaian untuk (2.19) adalah non-trivial dalam bentuk

$$X(x) = c_1$$

dengan c_1 adalah sembarang konstanta bukan nol. Untuk $K < 0$ persamaan karekteristik (2.20) mempunyai akar-akar $r = \pm i\sqrt{-K}$, sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{-K}x + c_2 \sin\sqrt{-K}x$$

Turunan pertama dari bentuk terakhir,

$$X'(x) = -\sqrt{-K}c_1 \sin\sqrt{-K}x + \sqrt{-K}c_2 \cos\sqrt{-K}x$$

Substitusikan syarat batas diperoleh $X'(0) = 0$, dan diperoleh

$$X'(0) = -\sqrt{-K}c_1 \sin\sqrt{-K}(0) + \sqrt{-K}c_2 \cos\sqrt{-K}(0) = 0$$

$$0 + c_2\sqrt{-K} = 0$$

atau $c_2 = 0$, sedangkan untuk syarat batas $X'(L) = 0$, memberikan

$$X'(L) = -\sqrt{-K}c_1 \sin\sqrt{-K}(L) + \sqrt{-K}c_2 \cos\sqrt{-K}(L) = 0$$

Oleh karena $c_2 = 0$, maka persamaan menjadi,

$$-\sqrt{-K}c_1 \sin\sqrt{-K}L = 0$$

dan

$$\sin\sqrt{-K}L = 0 \text{ hanya jika } \sqrt{-K}L = n\pi, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

maka

$$X_n(x) = \sin(n\pi x) \tag{2.22}$$

dan

$$T_n(t) = b_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \tag{2.23}$$

dengan b_n adalah konstanta sembarang. Gabungkan persamaan (2.23) dengan persamaan (2.20) dan kita peroleh fungsi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) b_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \tag{2.24}$$

dengan

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx \qquad (2.25)$$

Persamaan diferensial parsial parabolik dapat dibedakan menjadi 2 jenis, yaitu:

a) Persamaan diferensial parsial parabolik linear.

Persamaan diferensial parsial parabolik dikatakan linear jika koefisiennya konstanta atau suatu fungsi lain. Dengan persamaan umumnya sebagai berikut:

$$u_t = \alpha u_{xx} + \phi(x,t) \qquad (2.26)$$

dengan syarat batas $u(0,t) = 0$ serta syarat awalnya adalah $u(x,0) = f(x)$ untuk $0 \le x \le 1$.

dengan:

x adalah Panjang pipa

t adalah Waktu

Persamaan diferensial parabolik linear dibagi 2, yaitu:

i. Persamaan diferensial parabolik homogen.

   Persamaan (2.26) dikatakan persamaan linear homogen jika $\phi(x,t) = 0$

ii. Persamaan diferensial parabolik nonhomogen.

   Persamaan (2.26) dikatakan persamaan linear nonhomogen jika $\phi(x,t) \neq 0$

b) Persamaan diferensial parsial parabolik nonlinear

Persamaan diferensial parsial parabolik dikatakan nonlinear jika koefisien dari persamaan merupakan suatu fungsi integral dari fungsi diferensial yang ada, dengan bentuk umumnya adalah:

$$u_t = uu_{xx} + \phi(x,t) \qquad \text{untuk } t > 0,\ 0 < t < 1 \qquad (2.27)$$

dengan syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan $u(x,0) = f(x)$

Sebagian besar persamaan diferensial nonlinear dapat diselesaikan dengan menggunakan metode variabel. Tetapi ada juga yang tidak dapat diselesaikan dengan metode tersebut, maka kita dapat menggunakan metode homotopi pertubasi untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear tersebut.

2.5 Homotopi

Homotopi berasal dari bahasa Yunani yaitu *homos*: serupa, dan *topos*: tempat. Homotopi merupakan bagian terpenting dari topologi differensial. Misalkan X adalah sembarang ruang $f, g : I \rightarrow X$ dengan I adalah $0 \leq p \leq 1$ maka alur pada X mempunyai titik akhir yang sama yaitu $f(0) = x_0 = g(0)$ dan $f(1) = x_1 = g(1)$. Sebuah alur homotopi dari f ke g adalah suatu fungsi kontinue $H : I \times I \rightarrow X$ dari semua alur dan nilai parameter homotopi $0 \leq t \leq 1$ dan $0 \leq r \leq 1$ maka di dapat:

$$H(t,0) = f(t) \qquad H(t,1) = g(t) \qquad H(0,r) = x_0 \qquad H(1,r) = x_1$$

Dalam topologi fungsi kontinue $f, g : X \rightarrow Y$ merupakan homotopi jika fungsi kontinue berada pada $H : X \times I \rightarrow Y$ maka $H(x,0) = f(x)$ dan $H(x,1) = g(x)$ untuk seluruh $x \in X$. Selanjutnya H adalah homotopi dari f ke g yang didefinisikan dengan x dan y. Hubungan homotopi ditandai dengan $f \cong g$ atau $H : f \cong g$ untuk menetapkan H.

2.6 Metode Pertubasi

Metode perturbasi pertama kali diterapkan oleh J.Euler (1707-1783) dan J.L Lagrange (1736-1813) di bidang mekanik. Metode perturbasi berlandaskan suatu asumsi yaitu parameter kecil. Linearisasi dapat digunakan untuk menghitung sebuah hampiran penyelesaian persamaan diferensial dengan ide dasarnya adalah mengekspansi kedalam bentuk deret pangkat dari parameter kecil yang dapat diperluas terhadap suatu fungsi, juga mampu digunakan untuk menentukan hampiran penyelesaian persamaan diferensial. Yang dicari dalam bentuk:

$$u(x;p) = u_0(x) + pu_1(x) + p^2u_2(x) + \cdots \qquad (2.28)$$

Perhitungan atau proses yang dilakukan pada metode perturbasi ini adalah dengan mengabaikan suku-suku yang memuat $p, p^2, \cdots$ untuk orde nol. Untuk orde pertama dengan mengabaikan $p^2, p^3, p^4, \cdots$, begitu juga untuk orde-orde selanjutnya.

Contoh 2.6

Selesaikan persamaan diferensial nonlinear berikut:

$$u_x + u + pu^2 = 0, \text{ dengan } u(0) = 1 \quad (2.29)$$

Penyelesaian:

Penyelesaian persamaan (2.29) diperoleh dalam bentuk $u(x;p) = u_0(x) + pu_1(x) + p^2u_2(x)$. Untuk orde nol maka $p, p^2, \cdots = 0$, sehingga diperoleh bentuk:

$$u_{0x} + u_0 + pu_0{}^2 = 0, \text{ dengan } u_0(0) = 1 \quad (2.30)$$

Oleh karena $p = 0$, maka bentuk persamaan (2.30) menjadi:

$$u_{0x} + u_0 = 0 \qquad\qquad u_0(0) = 1$$

Penyelesaian persamaan diferensialnya adalah:

$$u_0(x) = c_1e^{-x}$$

Dengan mensubstitusikan $u_0(0) = 1$ diperoleh $c_1 = 1$ sehingga penyelesaian khususnya adalah:

$$u_0(x) = e^{-x} \quad (2.31)$$

Untuk orde pertama, substitusikan bentuk

$$u(x;p) = u_0(x) + pu_1(x)$$

dan mengabaikan betuk-bentuk $p^2 = p^3 = \cdots = 0$, persamaan (2.29) menjadi

$$(u_{0x} + pu_{1x}) + (u_0 + pu_1) + p(u_0 + pu_1)^2 = 0$$
$$u_{0x} + u_0 + p(u_{1x} + u_1 + u_0{}^2) + p^2u_0u_1 + p^3u_1 = 0$$

Abaikan bentuk-bentuk yang memuat p^2 dan p^3 sehingga diperoleh

$$u_{0x} + u_0 + p(u_{1x} + u_1 + u_0{}^2) = 0$$

dan substitusikan $u_0 = e^{-x}$ dan $u_{0x} = -e^{-x}$ sehingga diperoleh

$$-e^{-x} + e^{x} + p(u_{1x} + u_1 + (e^{-x})^2) = 0$$
$$p(u_{1x} + u_1 + (e^{-x})^2) = 0$$
$$(u_{1x} + u_1 + (e^{-x})^2) = 0$$
$$u_{1x} + u_1 = -e^{-2x}$$

Oleh karena syarat batas $u_1(0)=0$, maka penyelesaian persamaan diatas adalah

$$u_1(x)=e^{-2x}-e^{x} \tag{2.32}$$

Selanjutnya untuk orde kedua substitusikan

$$u(x;p)=u_0(x)+pu_1(x)+p^2u_2(x)$$

ke dalam persamaan (2.28) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}&(u_{0x}(x)+pu_{1x}(x)+p^2u_{2x}(x))+(u_0(x)+pu_1(x)+p^2u_2(x)\\&+p(u_0(x)+pu_1(x)+p^2u_2(x))^2=0\end{aligned}$$

dengan mengabaikan bentuk-bentuk yang melibatkan $p^3=p^4=\cdots=0$ maka diperoleh

$$(u_{0x}(x)+pu_{1x}(x)+p^2u_{2x}(x))+(u+pu_1(x)+p^2u_2(x))+pu_0(x)^2+2p^2u_0u_1(x)=0$$
$$u_{0x}(x)+u_0(x)+p(u_{1x}(x)+u_1(x)+u_0(x)^2)+p(u_{2x}(x)+u_2(x)+2u_0u_1(x))=0$$

substitusikan $u_0(x)=e^{-x}$ dan $u_1(x)=e^{-2x}-e^{-x}$, sehingga diperoleh

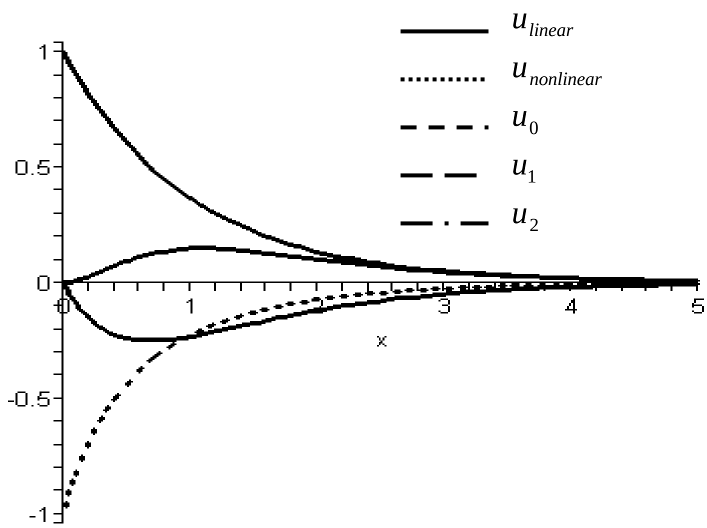
$$\begin{aligned}p^2(u_{2x}(x)+u_2(x)+2u_0u_1(x))&=0\\u_{2x}(x)+u_2(x)&=-2u_0u_1(x)\\u_{2x}(x)+u_2(x)&=-2e^{-x}(e^{-2x}-e^{-x})\end{aligned}$$

Oleh karena syarat batas $u_2(0)=0$, maka penyelesaian persamaan diatas adalah

$$u_2(x)=e^{-3x}-2e^{-2x}+e^{-x} \tag{2.33}$$

Jika perhitungan dihentikan sampai orde 2 maka diperoleh

$$u(x)=e^{-x}+p(e^{-2x}-e^{-x})+p^2(e^{-3x}-2e^{-2x}+e^{-x})+\cdots \tag{2.34}$$



Gambar 2.1 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial nonlinear $u_x + u + pu^2 = 0$ dengan $u(0) = 1$ untuk beberapa orde.

2.7 Metode Pertubasi Homotopi

Metode pertubasi homotopi adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear dan hasil perhitungannya cukup efektif dan akurat.

Misalkan:

$$A(u) - f(r) = 0 \tag{2.35}$$

dengan kondisi batas:

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0 \tag{2.36}$$

dengan A adalah operator diferensial umum, B adalah operator syarat batas, $f(r)$ adalah analisis fungsi yang diketahui. Operator A dapat dibagi menjadi dua bagian yaitu L dan N dimana L adalah linear dan N adalah nonlinear.

Oleh karena itu persamaan (2.35) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \tag{2.37}$$

Pada teknik homotopi, membangun sebuah homotopi $v(r, p)$ yang memenuhi:

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[L(v) + N(v) - f(r)] = 0\ ,\ p \in [0,1] \tag{2.38}$$

yang ekuivalen dengan:

$$H(v,p)=L(v)-L(u_0)+p\left[L(v)+N(v)-f(r)\right]=0 \tag{2.39}$$

dengan $p\in[0,1]$ merupakan *embedding* parameter yang digunakan sebagai parameter kecil dan $u(0)$ merupakan perkiraan awal dari persamaan (2.35) yang memenuhi kondisi batas.

Selanjutnya jika diberikan $p=0$, maka persamaan (2.39) akan menjadi:

$$H(v,0)=L(v)-L(u_0)=0 \tag{2.40}$$

sedangkan jika $p=1$, maka persamaan (2.39) menjadi:

$$H(v,1)=L(v)+N(v)-f(r)=0 \tag{2.41}$$

Proses perubahan p dari 0 ke 1 mengubah $v(r,p)$ dari $v_0(x)$ ke $v(x)$ dalam topologi disebut deformasi, sedangkan persamaan (2.40) dan (2.41) disebut homotopi. Selanjutnya, jika dimisalkan bahwa solusi dari persaman (2.38) dan (2.39) dapat ditulis sebagai berikut:

$$v(x)=v_0(x)+pv_1(x)+p^2v_2(x)+p^3v_3(x)+\cdots \tag{2.42}$$

Selanjutnya substitusi persamaan (2.42) ke persamaan (2.38) dan diperoleh

$$\begin{aligned}H(v,p)=(1-p)[L(v_0+pv_1+p^2v_2+\cdots)-L(u)]+p[L(v_0+pv_1+p^2v_2+\cdots)\\+N(v_0+pv_1+p^2v_2+\cdots)-f(r)]=0\end{aligned} \tag{2.43}$$

Misalkan L dan N merupakan operator diferensial untuk masing-masing fungsi linear dan nonlinear. Oleh karena sifat linear dari operator diferensial maka

$$\begin{aligned}H(v,p)=L(v_0)-L(u_0)+p[L(v_1)+N(v_0)+L(u_0)-f(r)]+p^2[N(v_1)\\+L(v_2)]+p^3[L(v_3)+N(v_3)]+\cdots\end{aligned} \tag{2.44}$$

Selanjutnya ekspansi persamaan (2.44) berdasarkan pada orde pertubasi dan diperoleh orde nol yaitu

$$\begin{aligned}p^0:L(v_0)-L(u_0)&=0\\ L(v_0)&=L(u_0)\\ v_0&=L^{-1}L(u_0)\\ v_0&=u_0\end{aligned}$$

untuk orde pertama diberikan oleh

$$p^1 : L(v_1) + N(v_0) + L(u_0) - f(r) = 0$$

$$L(v_1) = -N(v_0) - L(u_0) + f(r)$$

$$v_1 = -L^{-1}N(v_0) - L^{-1}L(u_0) + L^{-1}f(r)$$

$$v_1 = -L^{-1}N(v_0) - u_0 + L^{-1}f(r)$$

$$\vdots$$

Selanjutnya diperoleh nilai-nilai $v_0, v_1, \cdots$. Dalam metode pertubasi homotopi perkiraan solusi persamaan (2.35) dengan $p = 1$ adalah

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{2.45}$$

BAB III

METODOLOGI

Metode yang digunakan penulis pada skripsi ini adalah metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial parabolik nonlinear dengan persamaan umumnya $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$, dengan syarat batas $u(0,t) = u(L,t) = c$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$.
2. Mengubah persamaan (2.35) ke dalam bentuk persamaan homotopi yaitu $H(v,p) = L(v) - L(u_0) + p[L(v) + N(v) - f(r)] = 0$.
3. Substitusi persamaan pertubasi ke dalam persamaan yang telah diubah kedalam bentuk persamaan homotopi sehingga diperoleh $v_0, v_1, v_2, \cdots$.
4. Menjumlahkan $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ karena inilah persamaan eksak dari persamaan diferensial nonlinear tersebut.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Persamaan Nonhomogen

Pertimbangkan kembali persamaan parabolik nonlinear berikut

$$u_t - u_{xx} - f(u) = \phi(x,t) \tag{4.1}$$

Misalkan $f(u)$ adalah fungsi yang terdiri dari bentuk nonlinear $N(u)$ dan linear $R(u)$, maka persamaan (4.1) dapat ditulis kembali:

$$u_t - u_{xx} - N(u) - R(u) = \phi(x,t) \tag{4.2}$$

dengan nilai awal $u(x,0) = f(x)$. Persamaan (4.2) dikatakan nonhomogen jika $\phi(x,t) \neq 0$.

Penyelesaian persamaan (4.2) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $v(x,t)$ yang merupakan deret $v_0(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), \cdots$, ditulis

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) \end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan (4.2) dilakukan dengan mengubah persamaan (4.2) kedalam bentuk homotopi yaitu

$$H(v,t) = v_0 - u_{0t} + p[v_t - v_{xx} - N(v) - R(v)] - \phi(x,t) = 0 \tag{4.3}$$

Selanjutnya substitusi persamaan pertubasi ke persamaan (4.3) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} H(v,t) = v_{0t} - u_{0t} + p[(v_{0t} + pv_{1t} + p^2 v_{2t} + \cdots) - (v_{0xx} + pv_{1xx} \\ p^2 v_{2xx} + p^3 v_{3xx} + \cdots) - N(v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots) \\ - R(v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots)] - \phi(x,t) = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Selanjutnya ekspansi persamaan (4.4) berdasarkan pada orde pertubasi dan diperoleh orde nol p^0 yaitu

$$v_{0t}(x,t) - u_{0t} - \phi(x,t) = 0$$

dan penyelesaian $v_0(x,t)$ adalah

$$v_0 = u_{0t} + \phi(x,t)$$

Untuk orde pertama p^1 diberikan oleh

$$v_{1t}(x,t) + v_0 - v_{0xx} - N(v_0) - R(v_0) = 0$$

$$v_{1t}(x,t) = -v_0 + v_{0xx} + N(v_0) + R(v_0)$$

dan penyelesaian $v_1(x,t)$ adalah

$$v_1(x,t) = -L_t^{-1}(v_0) + L_t^{-1}(v_{0xx}) + L_t^{-1}N(v_0) + L_t^{-1}R(v_0)$$

Untuk orde kedua p^2 diberikan oleh

$$v_{2t}(x,t) + v_1 - v_{1xx} - N(v_1) - R(v_1) = 0$$

$$v_{2t}(x,t) = -v_1 + v_{1xx} + N(v_1) + R(v_1)$$

dan penyelesaian $v_2(x,t)$ adalah

$$v_2(x,t) = -L_t^{-1}(v_1) + L_t^{-1}(v_{1xx}) + L_t^{-1}N(v_1) + L_t^{-1}R(v_1)$$

$$\vdots$$

Setelah nilai suku-suku $v_0(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), \cdots, v_{n+1}(x,t)$ telah diketahui maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} v(x,t) \tag{4.5}$$

Contoh 4.1

Tentukan penyelesaian dari persamaan parabolik linear berikut

$$u_t = u_{xx} + e^{-x}(\cos t - \sin t) \tag{4.6}$$

dengan masalah nilai awalnya $u(x,0) = x$.(Bongsoo Jang (2007))

Penyelesaian:

Penyelesaian persamaan parabolik linear pada persamaan (4.6) dilakukan dengan mengubah persamaan (4.6) kedalam bentuk homotopi yaitu

$$H(v,p) = v_{0t} - u_{0t} + p[v_t - v_{xx}] - e^{-x}(\cos t - \sin t) = 0 \tag{4.7}$$

Selanjutnya substitusi persamaan pertubasi ke (4.7) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} H(v,p) = v_{0t} - u_{0t} + p[(v_{0t} + pv_{1t} + p^2 v_{2t} + \cdots) - \\ (v_{0xx} + pv_{1xx} + p^2 v_{2xx} + \cdots)] - e^{-x}(\cos t - \sin t) = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Analog dengan cara pertubasi maka untuk orde nol p^0 dengan $p = p^2 = \cdots = 0$ maka $v = v_0$ dan dari persamaan (4.8) diperoleh:

$$v_{0t}(x,t) - u_{0t} - e^{-x}(\cos t - \sin t) = 0$$

$$v_{0t}(x,t) = x + e^{-x}(\cos t - \sin t)$$

penyelesaian $v_0(x,t)$ diberikan oleh

$$v_0(x,t) = x + e^{-x}(\sin t + \cos t - 1) \qquad (4.9)$$

Untuk orde pertama p^1 dengan $p^2 = p^3 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1$ dan dari persamaan (4.8) diperoleh:

$$v_{1t}(x,t) - v_{0xx} = 0$$

$$v_{1t}(x,t) = e^{-x}(\sin t + \cos t - 1)$$

penyelesaian $v_1(x,t)$ diberikan oleh

$$v_1(x,t) = \int_0^t e^{-x}(\sin t + \cos t - 1)dt$$

$$= e^{-x}(-\cos t + \sin t - 1) \qquad (4.10)$$

Untuk orde kedua p^2 dengan $p^3 = p^4 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2$ dan dari persamaan (4.8) diperoleh:

$$v_{2t}(x,t) - v_{1xx} = 0$$

$$v_{2t}(x,t) = e^{-x}(-\cos t + \sin t - t)$$

penyelesaian $v_2(x,t)$ diberikan oleh

$$v_2(x,t) = \int_0^t e^{-x}(-\cos t + \sin t - t)dt$$

$$= e^{-x}(1 + t - \frac{1}{2}t^2 - \sin t - \cos t) \qquad (4.11)$$

Untuk orde ketiga p^3 dengan $p^4 = p^5 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + p^3 v_2$ dan dari persamaan (4.8) diperoleh:

$$v_{3t}(x,t) - v_{2xx} = 0$$

$$v_{3t}(x,t) = e^{-x}(1 + t - \frac{1}{2}t^2 - \sin t - \cos t)$$

penyelesaian $v_3(x,t)$ diberikan oleh

$$v_3(x,t) = \int_0^t e^{-x}(1+t-\frac{1}{2}t^2 - \sin t - \cos t)dt$$

$$= e^{-x}(-1+t+\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \cos t - \sin t) \qquad (4.12)$$

Untuk orde keempat p^4 dengan $p^5 = p^6 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1 + \cdots + p^4 v_4$ dan dari persamaan (4.8) diperoleh:

$$v_{4t}(x,t) - v_{3xx} = 0$$

$$v_{4t}(x,t) = e^{-x}(-1+t+\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \cos t - \sin t)$$

penyelesaian $v_1(x,t)$ diberikan oleh

$$v_4(x,t) = \int_0^t e^{-x}(1+t+\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \cos t - \sin t)dt$$

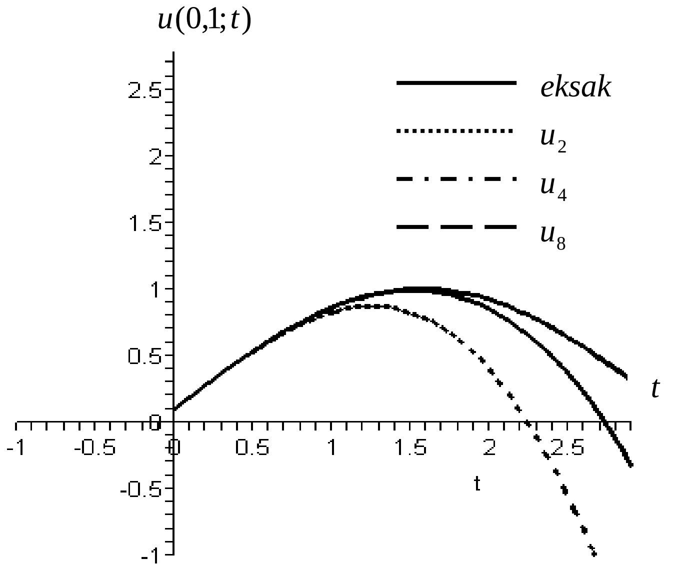
$$v_4(x,t) = e^{-x}(-1-t+\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{4!}t^4 + \sin t - \cos t) \qquad (4.13)$$

$$\vdots$$

Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $v_0(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t), \cdots$ atau ditulis

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{p\to 1} v(x,t) \\ &= v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + \cdots \\ &= x + e^{-x}(\sin t + \cos t - 1) + e^{-x}(1 - \cos t + \sin t - t) + \\ &\quad e^{-x}(1 + t - \frac{1}{2!}t^2 - \sin t - \cos t) + \cdots \\ &= x + e^{-x} \sin t \end{aligned}$$

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk beberapa jumlah suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial parabolik nonlinear di $x = 0{,}1$.



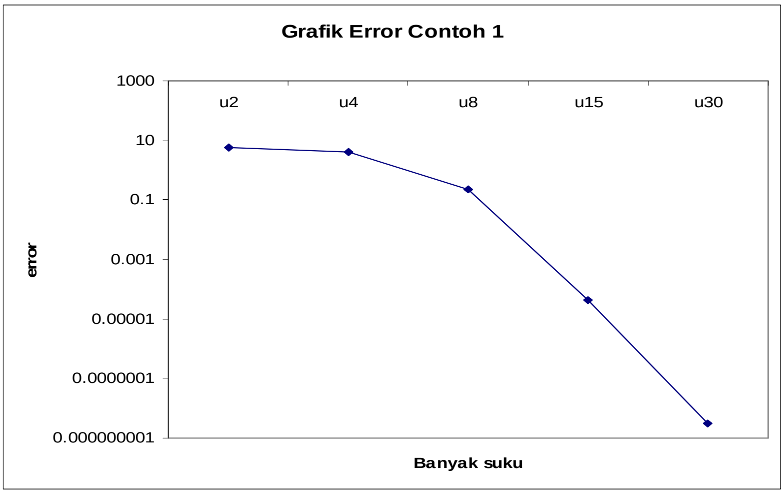
Gambar 4.1 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial parabolik linear $u_t = u_{xx} + e^{-x}(\cos t - \sin t)$ dengan $u(x,0) = x$ di $x = 0{,}1$ untuk beberapa jumlah suku.

Pada gambar 4.1 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh $u_8(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva-kurva lainnya. Hal ini menjelaskan bahwa suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksaknya.

Tabel 4.1 Perbandingan error E_n di $x = 0{,}1$ dengan solusi eksak $u(x,t) = x + e^{-x}\sin t$.

$x = 0{,}1$	t			
	0,1	1	3	4
$u(x,t)$	0,1903330110	0,1157915904	0,1473555315	0,1631182676
E_2	1,0000037689	0,0364670344	2,2711487080	5,7424207210
E_4	0,0000000010	0,0012345247	0,7826775775	3,9091787362
E_8	0	0,0000002457	0,0013767744	0,2323787362
E_{15}	0	0	0,0000003211	0,0000417371
E_{30}	0	0	0,0000000005	0,0000000032

Berdasarkan tabel 4.1 dapat dilihat bahwa E_{30} lebih memperkecil *error*, dan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dapat dilihat pada gambar 4.2.



Gambar 4.2 Kecepatan Metode Pertubasi Homotopi menghampiri persamaan diferensial parabolik linear $u_t = u_{xx} + e^{-x}(\cos t - \sin t)$ dengan $u(x,0) = x$ di $x = 0{,}1$ dan $t = 4$ untuk beberapa jumlah suku.

4.2 Persamaan Homogen

Persamaan (4.2) dikatakan homogen jika $\phi(x,t) = 0$. Persamaan (4.2) dapat ditulis kembali:

$$u_t - u_{xx} - N(u) - R(u) = \phi(x,t) \tag{4.14}$$

Penyelesaian persamaan (4.14) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $v(x,t)$ yang merupakan deret $v_0(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), \cdots$, ditulis

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) \end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan (4.14) dilakukan dengan mengubah persamaan (4.14) kedalam bentuk homotopi yaitu

$$H(v,t) = v_{0t} - u_{0t} + p[v_t - v_{xx} - N(v) - R(v)] = 0 \tag{4.15}$$

Selanjutnya substitusi persamaan pertubasi ke persamaan (4.15) sehingga diperoleh

$$H(v,t) = v_{0t} - u_{0t} + p[(v_{0t} + pv_{1t} + p^2 v_{2t} + \cdots) - (v_{0xx} + pv_{1xx}$$
$$p^2 v_{2xx} + p^3 v_{3xx} + \cdots) - N(v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots)$$
$$- R(v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots)] = 0 \qquad (4.16)$$

Selanjutnya ekspansi persamaan (4.16) berdasarkan pada orde pertubasi dan diperoleh orde nol p^0 yaitu

$$v_{0t}(x,t) - u_{0t} = 0$$

dan penyelesaian $v_0(x,t)$ adalah

$$v_{0t} = u_{0t}$$

Untuk orde pertama p^1 diberikan oleh

$$v_{1t}(x,t) + v_0 - v_{0xx} - N(v_0) - R(v_0) = 0$$
$$v_{1t}(x,t) = -v_0 + v_{0xx} + N(v_0) + R(v_0)$$

dan penyelesaian $v_1(x,t)$ adalah

$$v_1(x,t) = -L_t^{-1}(v_0) + L_t^{-1}(v_{0xx}) + L_t^{-1}N(v_0) + L_t^{-1}R(v_0)$$

Untuk orde kedua p^2 diberikan oleh

$$v_{2t}(x,t) + v_1 - v_{1xx} - N(v_1) - R(v_1) = 0$$
$$v_{2t}(x,t) = -v_1 + v_{1xx} + N(v_1) + R(v_1)$$

dan penyelesaian $v_2(x,t)$ adalah

$$v_2(x,t) = -L_t^{-1}(v_1) + L_t^{-1}(v_{1xx}) + L_t^{-1}N(v_1) + L_t^{-1}R(v_1)$$
$$\vdots$$

Setelah nilai suku-suku $v_0(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), \cdots, v_{n+1}(x,t)$ telah diketahui maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$u(x,t) = \lim_{n \to \infty} v(x,t)$$

Contoh 4.2

Tentukan penyelesaian dari persamaan parabolik linear berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.17}$$

dengan masalah nilai awalnya $u(x,0) = 1 - x^2$. (J. Biazar (2006))

Penyelesaian:

Persamaan (4.17) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

atau

$$u_t = u_{xx} + \frac{2}{x}u_x$$

Penyelesaian persamaan parabolik linear pada persamaan (4.17) dilakukan dengan mengubah persamaan (4.17) kedalam bentuk homotopi yaitu

$$H(v,p) = v_{0t} - u_{0t} + p\left(v_t - v_{xx} - \frac{2}{x}v_x\right) = 0 \tag{4.18}$$

Selanjutnya substitusi persamaan pertubasi ke (4.18) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} H(v,p) = v_{0t} - u_{0t} + p[(v_{0t} + pv_{1t} + p^2 v_{2t} + \cdots) - \\ (v_{0xx} + pv_{1xx} + \cdots) - \frac{2}{x}(v_{0x} + pv_{1x} + \cdots)] = 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Analog dengan cara pertubasi maka untuk orde nol p^0, dengan $p = p^2 = \cdots = 0$ maka $v = v_0$ dari persamaan (4.19) diperoleh:

$$v_{0t}(x,t) - u_{0t} = 0$$

$$v_{0t}(x,t) = u_{0t}$$

penyelesaian $v_0(x,t)$ diberikan oleh

$$\begin{aligned} v_0(x,t) &= \int_0^t u_{0t}\,dt \\ &= 1 - x^2 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Untuk orde pertama p^1 dengan $p^2 = p^3 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1$ dan dari persamaan (4.19) diperoleh:

$$v_{1t}(x,t) - v_{0xx} - \frac{2}{x}v_{0x} = 0$$

$$v_{1t}(x,t) = v_{0xx} + \frac{2}{x}v_{0x}$$
$$= -6$$

penyelesaian $v_1(x,t)$ diberikan oleh

$$v_{1t}(x,t) = \int_0^t -6dt$$
$$= 6t \qquad (4.21)$$

Untuk orde kedua p^2 dengan $p^3 = p^4 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1 + p^2v_2$ dan dari persamaan (4.19) diperoleh:

$$v_{2t}(x,t) - v_{1xx} - \frac{2}{x}v_{1x} = 0$$

$$v_{2t}(x,t) = v_{1xx} + \frac{2}{x}v_{1x}$$
$$= 0$$

penyelesaian $v_2(x,t)$ diberikan oleh

$$v_2(x,t) = \int_0^t 0dt$$
$$= 0 \qquad (4.22)$$

Untuk orde ketiga p^3 dengan $p^4 = p^5 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_2$ dan dari persamaan (4.19) diperoleh:

$$v_{3t}(x,t) - v_{2xx} - \frac{2}{x}v_{2x} = 0$$

$$v_{3t}(x,t) = v_{2xx} + \frac{2}{x}v_{2x}$$
$$= 0$$

penyelesaian $v_3(x,t)$ diberikan oleh

$$v_3(x,t) = \int_0^t 0dt$$

$$v_3(x,t) = 0 \tag{4.23}$$

$$\vdots$$

Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $v_0(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t), \cdots$ atau ditulis

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{p \to 1} v(x,t) \\ &= v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + \cdots \\ &= 1 - x^2 - 6t + 0 + \cdots \\ &= 1 - x^2 - 6t \end{aligned}$$

Contoh 4.3

Tentukan penyelesaian dari persamaan parabolik linear berikut

$$u_t - \frac{x^2}{2} u_{xx} = 0 \tag{4.24}$$

dengan masalah nilai awal $u(x,0) = x^2$.(Lin Jin (2008))

Penyelesian :

Penyelesaian persamaan parabolik linear pada persamaan (4.24) dilakukan dengan mengubah persamaan (4.24) kedalam bentuk homotopi yaitu

$$H(v,p) = v_{0t} - u_{0t} + p[v_t - \frac{x^2}{2} v_{xx}] = 0 \tag{4.25}$$

Selanjutnya substitusi persamaan pretubasi ke (4.25) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} H(v,p) = v_{0t} - u_{0t} + p[(v_{0t} + pv_{1t} + p^2 v_{2t} + \cdots) \\ - \frac{x^2}{2}(v_{0xx} + pv_{1xx} + \cdots)] = 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Analog dengan cara pertubasi maka untuk orde nol p^0, dengan $p = p^2 = \cdots = 0$ maka $v = v_0$ dari persamaan (4.26) diperoleh:

$$v_{0t}(x,t) - u_{0t} = 0$$

$$v_{0t}(x,t) = u_{0t}$$

penyelesaian $v_0(x,t)$ diberikan oleh

$$v_0(x,t) = \int_0^t u_{0t}\,dt$$

$$= x^2 \qquad (4.27)$$

Untuk orde pertama p^1 dengan $p^2 = p^3 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1$ dan dari persamaan (4.26) diperoleh:

$$v_{1t}(x,t) - \frac{x^2}{2} v_{0xx} = 0$$

$$v_{1t}(x,t) = \frac{x^2}{2} v_{0xx}$$
$$= x^2$$

penyelesaian $v_1(x,t)$ diberikan oleh

$$v_1(x,t) = \int_0^t x^2\,dt$$

$$= tx^2 \qquad (4.28)$$

Untuk orde kedua p^2 dengan $p^3 = p^4 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2$ dan dari persamaan (4.26) diperoleh:

$$v_{2t}(x,t) - \frac{x^2}{2} v_{1xx} = 0$$

$$v_{2t}(x,t) = \frac{x^2}{2} v_{1xx}$$
$$= \frac{x^2}{2} 2t$$

penyelesaian $v_2(x,t)$ diberikan oleh

$$v_2(x,t) = \int_0^t \frac{x^2}{2} 2t\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2!} x^2 \qquad (4.29)$$

Untuk orde ketiga p^3 dengan $p^4 = p^5 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_2$ dan dari persamaan (4.26) diperoleh:

$$v_{3t}(x,t) - \frac{x^2}{2}v_{2xx} = 0$$

$$\begin{aligned} v_{3t}(x,t) &= \frac{x^2}{2}v_{2xx} \\ &= \frac{x^2t^2}{2!} \end{aligned}$$

penyelesaian $v_3(x,t)$ diberikan oleh

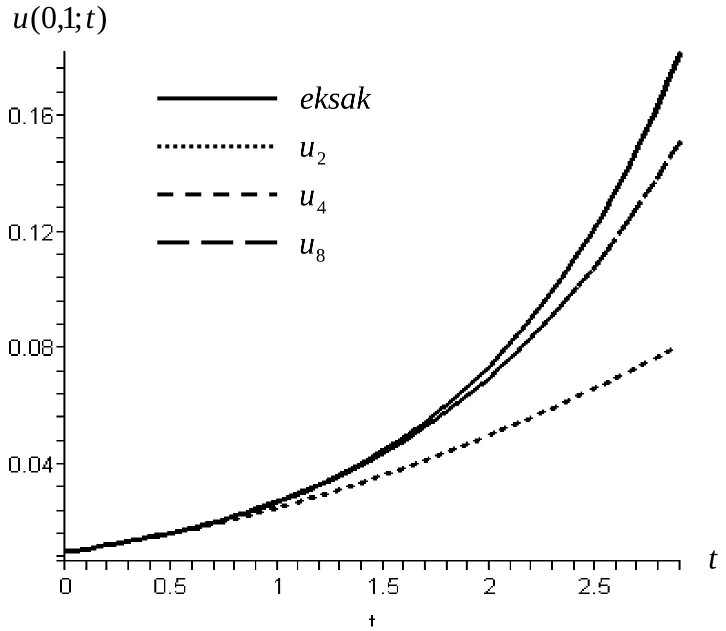
$$\begin{aligned} v_3(x,t) &= \int_0^1 \frac{x^2t^2}{2}dt \\ &= \frac{t^3}{3!}x^2 \qquad (4.30) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $v_0(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t), \cdots$ atau ditulis

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{p\to 1} v \\ &= v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + \cdots \\ &= x^2 + tx^2 + \frac{t^2}{2!}x^2 + \frac{t^3}{3!}x^3 + \cdots \\ &= x^2(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\cdots) \\ &= e^t x^2 \end{aligned}$$

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk beberapa jumlah suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial parabolik nonlinear di $x = 0{,}1$.



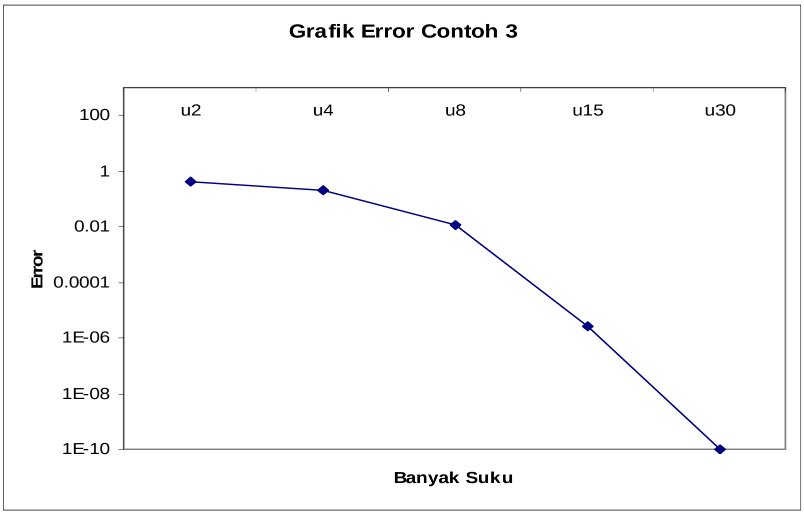
Gambar 4.3 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinear $u_t - \frac{x^2}{2}u_{xx} = 0$ dengan $u(x,0) = x^2$ di $x = 0{,}1$ untuk beberapa jumlah suku.

Pada gambar 4.3 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh $u_8(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva-kurva lainnya. Hal ini menjelaskan bahwa suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksaknya.

Tabel 4.2 Perbandingan error E_n di $x = 0{,}1$ dengan solusi eksak $u(x,t) = e^t x^2$.

$x = 0{,}1$	t			
	0,1	1	3	4
$u(x,t)$	0,0110517092	0,0278281828	0,2008553692	0,5459815003
E_2	0,0000017092	0,0021828183	0,1158553692	0,4159815003
E_4	0,0000000008	0,0000099485	0,0371053692	0,2026481669
E_8	0	0,0000000305	0,0007638514	0,0116640399
E_{15}	0	0	0,0000000250	0,0000026711
E_{30}	0	0	0,0000000001	0,0000000001

Berdasarkan tabel 4.2 dapat dilihat bahwa E_{30} lebih memperkecil *error*, dan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dapat dilihat pada gambar 4.4.



Gambar 4.4 Kecepatan Metode Pertubasi Homotopi menghampiri persamaan diferensial parabolik nonlinear $u_t - \frac{x^2}{2} u_{xx} = 0$ dengan $u(x,0) = x^2$ di $x = 0,1$ dan $t = 4$ untuk beberapa jumlah suku.

Contoh 4.4

Tentukan penyelesaian dari persamaan parabolik nonlinear berikut

$$u_t - u_{xx} = u^2 - (u_x)^2 \tag{4.31}$$

dengan masalah nilai awal $u(x,0) = e^x$. (Mustafa (2007))

Penyelesaian :

Penyelesaian persamaan parabolik nonlinear pada persamaan (4.31) dilakukan dengan mengubah persamaan (4.31) kedalam bentuk homotopi yaitu

$$H(v,p) = v_{0t} - u_{0t} - p[v_t - v_{xx} - v^2 + (v_x)^2] = 0 \tag{4.32}$$

Selanjutnya substitusi persamaan pertubasi ke (4.31) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} H(v,p) = v_{0t} - u_{0t} + p[(v_{0t} + pv_{1t} + p^2 v_{2t} + \cdots) - (v_{0xx} + pv_{1xx} + p^2 v_{2xx} + \cdots) \\ - (v_{0x} + pv_{1x} + p^2 v_{2x} + \cdots)^2 + (v_{0t} + pv_{1t} + p^2 v_{2t} + \cdots) = 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Analog dengan cara pertubasi maka untuk orde nol p^0, dengan $p = p^2 = \cdots = 0$ maka $v = v_0$ dari persamaan (4.33) diperoleh:

$$v_{0t}(x,t) - u_{0t} = 0$$

$$v_{0t}(x,t) = u_{0t}$$

penyelesaian $v_0(x,t)$ diberikan oleh

$$v_0(x,t) = \int_0^t u_{0t}\,dt$$

$$= e^x \tag{4.34}$$

Untuk orde pertama p^1 dengan $p^2 = p^3 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1$ dan dari persamaan (4.33) diperoleh:

$$v_{1t}(x,t) - v_{0xx} - v_0^{\ 2} + (v_{0x})^2 = 0$$

$$\begin{aligned} v_{1t}(x,t) &= v_{0xx} + v_0^{\ 2} - (v_{0x})^2 \\ &= e^x \end{aligned}$$

penyelesaian $v_1(x,t)$ diberikan oleh

$$v_1(x,t) = \int_0^t e^x\,dt$$

$$= e^x t \tag{4.35}$$

Untuk orde kedua p^2 dengan $p^3 = p^4 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2$ dan dari persamaan (4.33) diperoleh:

$$v_{2t}(x,t) - v_{0xx} - (2v_0 v_1) + (2v_{0x} v_{1x}) = 0$$

$$\begin{aligned} v_{2t}(x,t) &= v_{1xx} + (2v_0 v_1) - (2v_{0x} v_{1x}) \\ &= e^x t \end{aligned}$$

penyelesaian $v_2(x,t)$ diberikan oleh

$$v_2(x,t) = \int_0^t e^x t\,dt$$

$$= e^x \frac{1}{2!} t^2 \tag{4.36}$$

Untuk orde ketiga p^3 dengan $p^4 = p^5 = \cdots = 0$ maka $v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + p^3 v_2$ dan dari persamaan (4.33) diperoleh:

$$v_{3t}(x,t) - v_{2xx} - (2v_0 v_2 \times (v_1)^2) + (2v_{0x} v_{2x} \times (v_{1x})^2) = 0$$

$$v_{3t}(x,t) = v_{2xx} + (2v_0 v_2 \times (v_1)^2) - (2v_{0x} v_{2x} \times (v_{1x})^2)$$

$$= e^x \frac{1}{2!} t^2$$

Penyelesaian $v_3(x,t)$ diberikan oleh

$$v_3(x,t) = \int_0^t e^x t dt$$

$$= e^x \frac{1}{3!} t^3 \tag{4.37}$$

$\vdots$

Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $v_0(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t), \cdots$ atau ditulis

$$u(x,t) = \lim_{p \to 1} v$$

$$= v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + \cdots$$

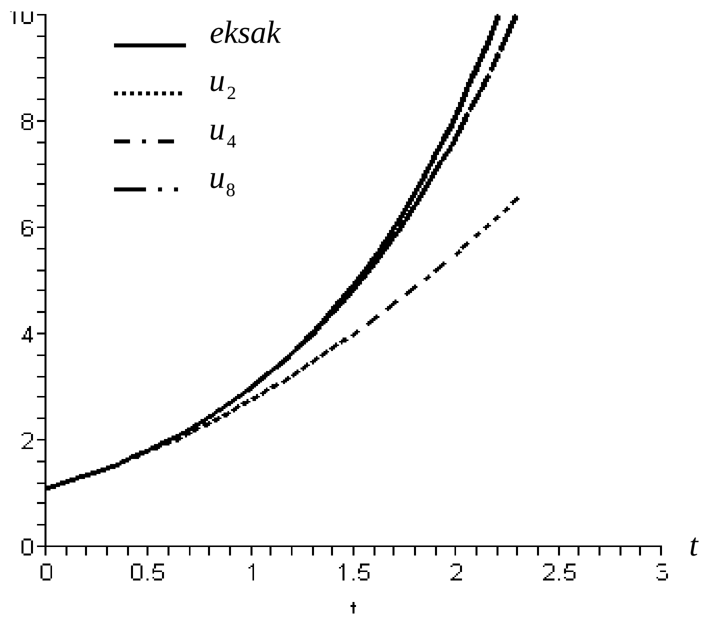
$$= e^x + e^x t + e^x \frac{t^2}{2!} + e^x \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

$$= e^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= e^x e^t$$

Gambar 4.5 menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk beberapa jumlah suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial parabolik nonlinear di $x = 0,1$.

$u(0{,}1;t)$



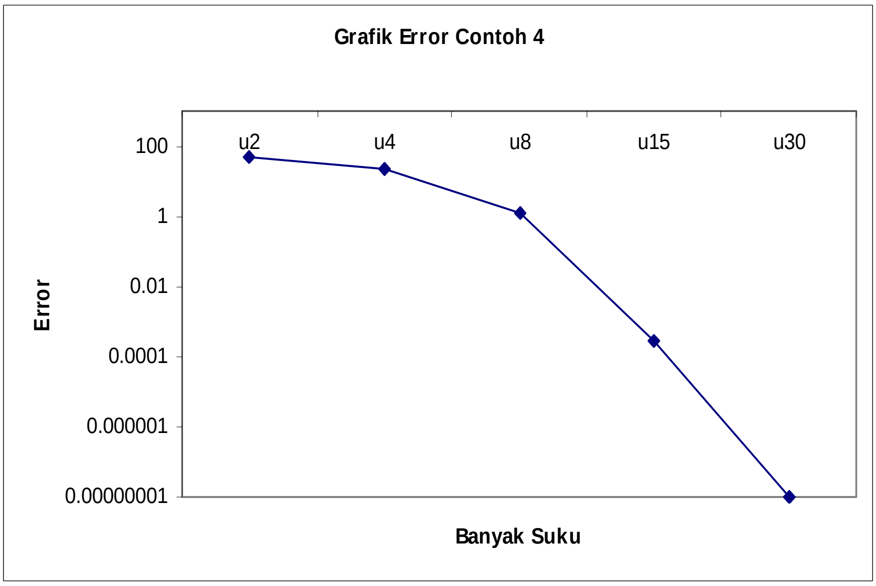
Gambar 4.5 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinear $u_t - u_{xx} - u^2 + (u_x)^2 = 0$ dengan $u(x,0) = e^x$ di $x = 0{,}1$ untuk beberapa jumlah suku.

Pada gambar 4.5 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh $u_8(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva-kurva lainnya. Hal ini menjelaskan bahwa suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksaknya.

Tabel 4.3 Perbandingan error E_n di $x = 0{,}1$ dengan solusi eksak $u(x,t) = e^{x+t}$.

$x = 0{,}1$	t			
	0,1	1	3	4
$u(x,t)$	1,2214027580	3,0041660240	22,197951800	60,340876000
E_2	0,0001888930	0,2412387280	12,8039984800	45,9730656500
E_4	0,0000000930	0,0109947870	4,1007774900	22,3960860700
E_8	0,0000000010	0,0000033790	0,0844186300	1,2890757800
E_{15}	0,0000000010	0,0000000020	0,0000027600	0,0002952400
E_{30}	0	0,0000000020	0,0000000100	0,0000000100

Berdasarkan tabel 4.3 dapat dilihat bahwa E_{30} lebih memperkecil *error*, dan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dapat dilihat pada gambar 4.6.



Gambar 4.6 Kecepatan Metode Pertubasi Homotopi menghampiri persamaan diferensial parabolik nonlinear $u_t - u_{xx} - u^2 + (u_x)^2 = 0$ dengan $u(x,0) = e^x$ di $x = 0{,}1$ dan $t = 4$ untuk beberapa jumlah suku.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya diperoleh kesimpulan bahwa metode pertubasi homotopi dapat menyelesaikan persamaan differensial parabolik nonlinear $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$ berdasarkan masalah nilai awal nonlinearnya $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan $u(0,x) = f(x)$. Hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi semakin mendekati eksak yang dapat dilihat pada Gambar (4.1) untuk contoh (4.1) untuk yang nonhomogen dan Gambar (4.3) untuk contoh (4.3) dan Gambar (4.5) untuk yang homogen. Dan semakin banyak jumlah suku-suku $v_0(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), \cdots$ yang digunakan maka hasilnya akan cukup akurat dan efektif.

5.2 Saran

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan differensial parabolik nonlinear $u_t - u_{xx} = f(u) + \phi(x,t)$ berdasarkan masalah nilai awal nonlinearnya $u(0,t) = u(L,t) = 0$ dan $u(0,x) = f(x)$ dengan menggunakan metode perturbasi homotopi. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan Tugas Akhir ini, penulis sarankan membahas tentang persamaan diferensial nonlinear yang lainnya seperti persamaan diferensial nonlinear hiperbolik dan persamaan diferensial nonlinear eliptik.

DAFTAR PUSTAKA

Biazar, J., dan Z. Ayati. ”An Approximation to the solution of parabolic by Adomian method and comparing the result with Crank-Nicolson method”, *International Mathematical Forum, 1, no. 39, 1395-1407,* 2007.

Biazar, J., dan H. Ghazvini. ”Solution of the Wave Equation by Homotopi Perturbation Method”, *International Mathematical Forum, 2, no. 45, 1395-1407,* 2007.

Ghotbi, R., Abdoul, M.A., Muhammadzade., dkk. “A New Approach to Solve Nonlinear Partial Differential Equations”, *Journal of Mathematical and Statistics 3(4) 201-206*, 2007.

Jang, B. “Exact solutions to one dimensional non-homogeneous parabolic problems by the homogeneous Adomian decomposition method”, *Applied Mathematical Comput. 186, 969-979,*2007.

Jin, Lin. “Homotopy Perturbation Method for Solving Partial Differential Equation with Variable Coefficients”, *Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, no. 28, 1395-1407*, 2008.

Mustafa. “On Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Decomposition Method”, *Kragujevac J. Math. 26, 153-164,*2004.

Sieradski, A.J. “*An Introduction to Topology and Homotopy”*, PWS-Kent, Boston, 1992.

Stewart, James. “*Kalkulus Edisi Keempat”*, I Nyoman Susila & Hendra Gunawan, Erlangga: Jakarta, Jilid 2, 2003.

LAMPIRAN C
MAPLE CONTOH 4.3

```
> restart;
> f:=x^2;
```

$$f := x^2$$

```
> y:=0;
```

$$y := 0$$

```
> ly:=int(y,t);
```

$$ly := 0$$

```
> v[0]:=f+ly;
```

$$v_0 := x^2$$

```
>p[1]:=((x^2/2)*diff(diff(v[0],x),x));v[1]:=int(p[1],t=
0..t);
```

$$p_1 := x^2$$

$$v_1 := x^2\, t$$

```
>p[2]:=((x^2/2)*diff(diff(v[1],x),x));v[2]:=int(p[2],t=
0..t);u[2]:=v[0]+v[1]+v[2];
```

$$p_2 := x^2\, t$$

$$v_2 := \frac{1}{2}\, x^2\, t^2$$

$$u_2 := x^2 + x^2\, t + \frac{1}{2}\, x^2\, t^2$$

```
>p[3]:=((x^2/2)*diff(diff(v[2],x),x));v[3]:=int(p[3],t=
0..t);
```

$$p_3 := \frac{1}{2}\, x^2\, t^2$$

$$v_3 := \frac{1}{6}\, x^2\, t^3$$

```
>p[4]:=((x^2/2)*diff(diff(v[3],x),x));v[4]:=int(p[4],t=
0..t);u[4]:=v[0]+v[1]+v[2]+v[3]+v[4];
```

$$p_4 := \frac{1}{6}\, x^2\, t^3$$

$$v_4 := \frac{1}{24} x^2 t^4$$

$$u_4 := x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 t^3 + \frac{1}{24} x^2 t^4$$

```
>p[5]:=((x^2/2)*diff(diff(v[4],x),x));v[5]:=int(p[5],t=
0..t);
```

$$p_5 := \frac{1}{24} x^2 t^4$$

$$v_5 := \frac{1}{120} x^2 t^5$$

```
>p[6]:=((x^2/2)*diff(diff(v[5],x),x));v[6]:=int(p[6],t=
0..t);
```

$$p_6 := \frac{1}{120} x^2 t^5$$

$$v_6 := \frac{1}{720} x^2 t^6$$

```
>p[7]:=((x^2/2)*diff(diff(v[6],x),x));v[7]:=int(p[7],t=
0..t);
```

$$p_7 := \frac{1}{720} x^2 t^6$$

$$v_7 := \frac{1}{5040} x^2 t^7$$

```
>p[8]:=((x^2/2)*diff(diff(v[7],x),x));v[8]:=int(p[8],t=
0..t);u[8]:=v[0]+v[1]+v[2]+v[3]+v[4]+v[5]+v[6]+v[7]+v[8
];
```

$$p_8 := \frac{1}{5040} x^2 t^7$$

$$v_8 := \frac{1}{40320} x^2 t^8$$

$$u_8 := x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 t^3 + \frac{1}{24} x^2 t^4 + \frac{1}{120} x^2 t^5 + \frac{1}{720} x^2 t^6 + \frac{1}{5040} x^2 t^7 + \frac{1}{40320} x^2 t^8$$

```
>p[9]:=((x^2/2)*diff(diff(v[8],x),x));v[9]:=int(p[9],t=
0..t);
```

$$p_9 := \frac{1}{40320} x^2 t^8$$

$$v_9 := \frac{1}{362880} x^2 t^9$$

```
>p[10]:=((x^2/2)*diff(diff(v[9],x),x));v[10]:=int(p[10]
,t=0..t);
```

$$p_{10} := \frac{1}{362880} x^2 t^9$$

$$v_{10} := \frac{1}{3628800} x^2 t^{10}$$

```
>p[11]:=((x^2/2)*diff(diff(v[10],x),x));v[11]:=int(p[11
],t=0..t);
```

$$p_{11} := \frac{1}{3628800} x^2 t^{10}$$

$$v_{11} := \frac{1}{39916800} x^2 t^{11}$$

```
>p[12]:=((x^2/2)*diff(diff(v[11],x),x));v[12]:=int(p[12
],t=0..t);
```

$$p_{12} := \frac{1}{39916800} x^2 t^{11}$$

$$v_{12} := \frac{1}{479001600} x^2 t^{12}$$

```
>p[13]:=((x^2/2)*diff(diff(v[12],x),x));v[13]:=int(p[13
],t=0..t);
```

$$p_{13} := \frac{1}{479001600} x^2 t^{12}$$

$$v_{13} := \frac{1}{6227020800} x^2 t^{13}$$

```
>p[14]:=((x^2/2)*diff(diff(v[13],x),x));v[14]:=int(p[14
],t=0..t);
```

$$p_{14} := \frac{1}{6227020800} x^2 t^{13}$$

$$v_{14} := \frac{1}{87178291200} x^2 t^{14}$$

```
>p[15]:=((x^2/2)*diff(diff(v[14],x),x));v[15]:=int(p[15
],t=0..t);u[15]:=v[0]+v[1]+v[2]+v[3]+v[4]+v[5]+v[6]+v[7
]+v[8]+v[9]+v[10]+v[11]+v[12]+v[13]+v[14]+v[15];
```

$$p_{15} := \frac{1}{87178291200} x^2 t^{14}$$

$$v_{15} := \frac{1}{1307674368000} x^2 t^{15}$$

$$u_{15} := x^2 + x^2 t + \frac{1}{2} x^2 t^2 + \frac{1}{6} x^2 t^3 + \frac{1}{24} x^2 t^4 + \frac{1}{120} x^2 t^5 + \frac{1}{720} x^2 t^6 + \frac{1}{5040} x^2 t^7 + \frac{1}{40320} x^2 t^8 + \frac{1}{362880} x^2 t^9 + \frac{1}{3628800} x^2 t^{10} + \frac{1}{39916800} x^2 t^{11} + \frac{1}{479001600} x^2 t^{12} + \frac{1}{6227020800} x^2 t^{13} + \frac{1}{87178291200} x^2 t^{14} + \frac{1}{1307674368000} x^2 t^{15}$$

```
>p[16]:=((x^2/2)*diff(diff(v[15],x),x));v[16]:=int(p[16
],t=0..t);
```

$$p_{16} := \frac{1}{1307674368000} x^2 t^{15}$$

$$v_{16} := \frac{1}{20922789888000} x^2 t^{16}$$

```
>p[17]:=((x^2/2)*diff(diff(v[16],x),x));v[17]:=int(p[17
],t=0..t);
```

$$p_{17} := \frac{1}{20922789888000} x^2 t^{16}$$

$$v_{17} := \frac{1}{355687428096000} x^2 t^{17}$$

```
>p[18]:=((x^2/2)*diff(diff(v[17],x),x));v[18]:=int(p[18
],t=0..t);
```

$$p_{18} := \frac{1}{355687428096000} x^2 t^{17}$$

$$v_{18} := \frac{1}{6402373705728000} x^2 t^{18}$$

```
>p[19]:=((x^2/2)*diff(diff(v[18],x),x));v[19]:=int(p[19
],t=0..t);
```

$$p_{19} := \frac{1}{6402373705728000} x^2 t^{18}$$

$$v_{19} := \frac{1}{121645100408832000} x^2 t^{19}$$

```
>p[20]:=((x^2/2)*diff(diff(v[19],x),x));v[20]:=int(p[20
],t=0..t);
```

$$p_{20} := \frac{1}{121645100408832000} x^2 t^{19}$$

$$v_{20} := \frac{1}{2432902008176640000} x^2 t^{20}$$

```
>p[21]:=((x^2/2)*diff(diff(v[20],x),x));v[21]:=int(p[21
],t=0..t);
```

$$p_{21} := \frac{1}{2432902008176640000} x^2 t^{20}$$

$$v_{21} := \frac{1}{51090942171709440000} x^2 t^{21}$$

```
>p[22]:=((x^2/2)*diff(diff(v[21],x),x));v[22]:=int(p[22
],t=0..t);
```

$$p_{22} := \frac{1}{51090942171709440000} x^2 t^{21}$$

$$v_{22} := \frac{1}{1124000727777607680000} x^2 t^{22}$$

```
>p[23]:=((x^2/2)*diff(diff(v[22],x),x));v[23]:=int(p[23
],t=0..t);
```

$$p_{23} := \frac{1}{1124000727777607680000} x^2 t^{22}$$

$$v_{23} := \frac{1}{25852016738884976640000} x^2 t^{23}$$

```
>p[24]:=((x^2/2)*diff(diff(v[23],x),x));v[24]:=int(p[24
],t=0..t);
```

$$p_{24} := \frac{1}{25852016738884976640000} x^2 t^{23}$$

$$v_{24} := \frac{1}{620448401733239439360000} x^2 t^{24}$$

```
>p[25]:=((x^2/2)*diff(diff(v[24],x),x));v[25]:=int(p[25
],t=0..t);
```

$$p_{25} := \frac{1}{620448401733239439360000} x^2 t^{24}$$

$$v_{25} := \frac{1}{15511210043330985984000000} x^2 t^{25}$$

```
>p[26]:=((x^2/2)*diff(diff(v[25],x),x));v[26]:=int(p[26
],t=0..t);
```

$$p_{26} := \frac{1}{15511210043330985984000000} x^2 t^{25}$$

$$v_{26} := \frac{1}{403291461126605635584000000} x^2 t^{26}$$

```
>p[27]:=((x^2/2)*diff(diff(v[26],x),x));v[27]:=int(p[27
],t=0..t);
```

$$p_{27} := \frac{1}{403291461126605635584000000} x^2 t^{26}$$

$$v_{27} := \frac{1}{10888869450418352160768000000} x^2 t^{27}$$

```
>p[28]:=((x^2/2)*diff(diff(v[27],x),x));v[28]:=int(p[28
],t=0..t);
```

$$p_{28} := \frac{1}{10888869450418352160768000000} x^2 t^{27}$$

$$v_{28} := \frac{1}{304888344611713860501504000000} x^2 t^{28}$$

```
>p[29]:=((x^2/2)*diff(diff(v[28],x),x));v[29]:=int(p[29
],t=0..t);
```

$$p_{29} := \frac{1}{304888344611713860501504000000} x^2 t^{28}$$

$$v_{29} := \frac{1}{8841761993739701954543616000000} x^2 t^{29}$$

```
>p[30]:=((x^2/2)*diff(diff(v[29],x),x));v[30]:=int(p[30
],t=0..t);u[30]:=v[0]+v[1]+v[2]+v[3]+v[4]+v[5]+v[6]+v[7
]+v[8]+v[9]+v[10]+v[11]+v[12]+v[13]+v[14]+v[15]+v[16]+v
[17]+v[18]+v[19]+v[20]+v[21]+v[22]+v[23]+v[24]+v[25]+v[
26]+v[27]+v[28]+v[29]+v[30];
```

$$p_{30} := \frac{1}{8841761993739701954543616000000} x^2 t^{29}$$

$$v_{30} := \frac{1}{265252859812191058636308480000000} x^2 t^{30}$$

$$
\begin{aligned}
u_{30} := {} & x^2 + \frac{1}{2} x^2 t^2 + x^2 t + \frac{1}{6} x^2 t^3 + \frac{1}{24} x^2 t^4 + \frac{1}{120} x^2 t^5 + \frac{1}{720} x^2 t^6 + \frac{1}{5040} x^2 t^7 + \frac{1}{40320} x^2 t^8 \\
& + \frac{1}{362880} x^2 t^9 + \frac{1}{3628800} x^2 t^{10} + \frac{1}{39916800} x^2 t^{11} + \frac{1}{479001600} x^2 t^{12} + \frac{1}{6227020800} x^2 t^{13} \\
& + \frac{1}{87178291200} x^2 t^{14} + \frac{1}{1307674368000} x^2 t^{15} + \frac{1}{20922789888000} x^2 t^{16} \\
& + \frac{1}{355687428096000} x^2 t^{17} + \frac{1}{6402373705728000} x^2 t^{18} + \frac{1}{121645100408832000} x^2 t^{19} \\
& + \frac{1}{2432902008176640000} x^2 t^{20} + \frac{1}{51090942171709440000} x^2 t^{21} \\
& + \frac{1}{1124000727777607680000} x^2 t^{22} + \frac{1}{25852016738884976640000} x^2 t^{23} \\
& + \frac{1}{620448401733239439360000} x^2 t^{24} + \frac{1}{15511210043330985984000000} x^2 t^{25} \\
& + \frac{1}{403291461126605635584000000} x^2 t^{26} + \frac{1}{10888869450418352160768000000} x^2 t^{27} \\
& + \frac{1}{304888344611713860501504000000} x^2 t^{28} + \frac{1}{8841761993739701954543616000000} x^2 t^{29} \\
& + \frac{1}{265252859812191058636308480000000} x^2 t^{30}
\end{aligned}
$$